Algebra wektorów

3.1. Pojęcie wektora w przestrzeni

Definicja 3.1. *Przestrzenią euklidesową trójwymiarową* $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych układów liczb rzeczywistych postaci (x, y, z), tzn.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z):\ x, y, z \in \mathbb{R}\}. \qquad (1)$$

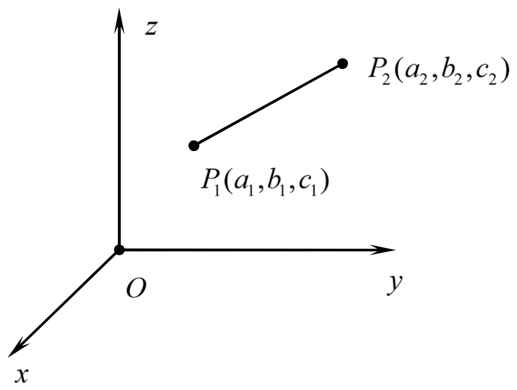
Definicja 3.2. *Prostokątnym układem kartezjańskim* w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy uporządkowaną trójkę parami prostopadłych osi liczbowych Ox, Oy, Oz o wspólnym początku w punkcie O. Ten układ oznaczamy przez $Oxyz$.

Zatem każdemu punktowi przestrzeni $P \in \mathbb{R}^3$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie trójka prostopadłych rzutów (x, y, z) tego punktu na kolejne osi Ox, Oy, Oz. Liczby x, y, z nazywamy również *współrzędnymi prostokątnymi* punktu P w układzie $Oxyz$ i zapisujemy

$$P = P(x, y, z).$$

Więc początek układu $Oxyz$ umieszczono w punkcie $O = O(0, 0, 0)$.

Niech $P_1(a_1, b_1, c_1)$ i $P_2(a_2, b_2, c_2)$ będą punktami przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

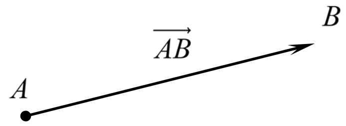


Definicja 3.3. *Długość* odcinka P_1P_2 w przestrzeni (1) określamy jako

$$|P_1P_2| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}\,. \qquad (2)$$

Definicja 3.4. Skierowany odcinek o początku w punkcie $A \in \mathbb{R}^3$ i o końcu w punkcie $B \in \mathbb{R}^3$ nazywamy *wektorem* w $\mathbb{R}^3$ i oznaczamy przez $\overrightarrow{AB}$.

Inaczej mówiąc, wektor $\overrightarrow{AB}$ jest uporządkowaną parą punktów (A, B).



Wiadomo, że przez dwa punkty w przestrzeni można poprowadzić dokładnie jedną linię prostą. Zaznaczmy również, że wszystkie równoległe proste mają ten sam kierunek. Zatem każdy wektor $\overrightarrow{AB}$ ma określoną długość $|\overrightarrow{AB}|$, kierunek (kierunek prostej wyznaczonej punktami A, B) oraz zwrot (A poprzedza B).

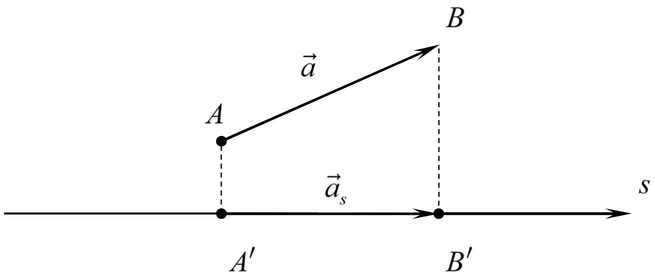
Definicja 3.5. Zbiór wszystkich wektorów o jednakowej długości, kierunku i zwrocie nazywamy *wektorem swobodnym*.

Wektor $\overrightarrow{AB}$, który ma początek w punkcie A (wektor zaczepiony), nazywamy reprezentantem pewnego wektora swobodnego. Wektor swobodny oznaczamy przez $\vec{a}$. Więc, jeżeli wektor $\overrightarrow{AB}$ jest reprezentantem wektora swobodnego $\vec{a}$, to piszemy $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Zaznaczmy, że dla wektora swobodnego punkt zaczepienia nie jest ważny. Jeżeli koniec wektora $\overrightarrow{AB}$ pokrywa się z jego początkiem, tzn. $A = B$, to wektor swobodny, którego reprezentantem jest wektor $\overrightarrow{AA}$, nazywamy *wektorem zerowym* i oznaczamy przez $\vec{0}$. Oczywiście, wektor zerowy ma długość zerową oraz dowolny kierunek i zwrot.
W dalszym ciągu rozważamy tylko wektory swobodne i mówimy krótko wektory.

Definicja 3.6. *Rzutem wektora* $\vec{a}$ *na oś* s nazywamy wektor $\vec{a}_s$, którego początek i koniec są rzutami na tę oś odpowiednio początku i końca wektora $\vec{a}$.
Inaczej mówiąc, jeżeli $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, to

$$\vec{a}_s = \overrightarrow{A'B'},$$

gdzie punkty A', B' są rzutami prostopadłymi punktów A, B na oś s (rys. 3.1).

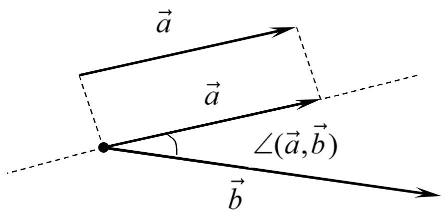


Rys. 3.1. Rzut wektora na oś

Definicja 3.7. *Współrzędną wektora* $\vec{a}$ *na osi* s (oznaczamy przez a_s) nazywamy różnicę współrzędnej końca i początku wektora $\vec{a}_s$.

Definicja 3.8. *Rzutem wektora* $\vec{a}$ *na wektor* $\vec{b}$ (oznaczamy przez $\overrightarrow{a_b}$) nazywamy rzut wektora $\vec{a}$ na oś, która zawiera wektor $\vec{b}$.

Definicja 3.9. *Kątem między niezerowymi wektorami* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ (oznaczamy przez $\angle(\vec{a}, \vec{b})$) nazywamy mniejszy spośród kątów utworzonych między reprezentantami tych wektorów mających wspólny początek (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Kąt między wektorami

Rozważmy teraz wektor w prostokątnym układzie kartezjańskim $Oxyz$.

Definicja 3.10. *Współrzędnymi wektora* $\vec{a}$ w kartezjańskim układzie prostokątnym $Oxyz$ nazywamy współrzędne tego wektora na osiach Ox, Oy, Oz i oznaczamy je odpowiednio przez a_x, a_y, a_z (patrz rys. 3.3).

Ponieważ w kartezjańskim układzie prostokątnym $Oxyz$ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między dowolnym wektorem $\vec{a}$ i trójką jego współrzędnych a_x, a_y, a_z, więc możemy zapisać

$$\vec{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}.$$

Niech $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, tzn. reprezentantem wektora $\vec{a}$ jest wektor o początku w punkcie $A(a_1, a_2, a_3)$ i o końcu w punkcie $B(b_1, b_2, b_3)$. Mamy wtedy

$$a_x = b_1 - a_1, \quad a_y = b_2 - a_2, \quad a_z = b_3 - a_3.$$

Stąd korzystając ze wzoru (2) długość wektora $\vec{a}$ wyraża się wzorem

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{3}$$

Przykład 3.1. Obliczyć współrzędne oraz długość wektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, jeżeli $A(-1, 6, 4)$ i $B(5, -2, 4)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$a_x = 5 - (-1) = 6, \quad a_y = -2 - 6 = -8, \quad a_z = 4 - 4 = 0.$$

Zatem

$$\vec{a} = \{6,\ -8,\ 0\}.$$

Korzystając ze wzoru (3) otrzymamy

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Definicja 3.11. *Wektorem jednostkowym* (*wersorem*) nazywamy wektor o długości jeden.

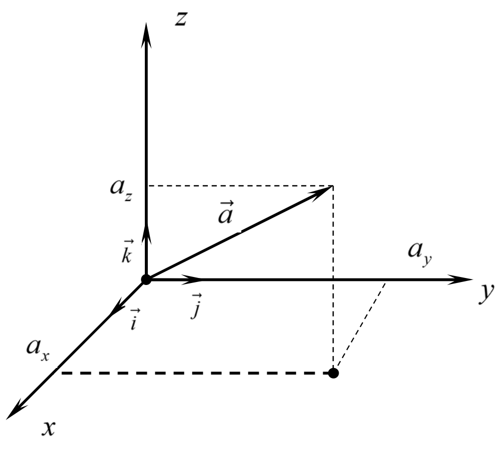
Definicja 3.12. *Wersorem niezerowego wektora* $\vec{a}$ nazywamy wektor jednostkowy zgodnie równoległy z tym wektorem.

Wersor wektora $\vec{a}$ oznaczamy przez $\hat{\vec{a}}$. Z definicji wynika, że wersor wektora $\vec{a}$ w układzie $Oxyz$ ma postać

$$\hat{\vec{a}} = \left\{ \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right\}.$$

Wśród wszystkich wektorów jednostkowych wyróżniamy tak zwane wersory osi układu $Oxyz$, tzn. wersory zgodnie równoległe z kolejnymi osiami Ox, Oy i Oz. Oznaczamy te wersory odpowiednio przez $\vec{i}$, $\vec{j}$ oraz $\vec{k}$ (patrz rys. 3.3). Zatem mamy

$$\vec{i} = \{1,\ 0,\ 0\}, \quad \vec{j} = \{0,\ 1,\ 0\}, \quad \vec{k} = \{0,\ 0,\ 1\}. \tag{4}$$



Rys. 3.3. Wektor w kartezjańskim układzie prostokątnym

Określmy działania algebraiczne na wektorach w prostokątnym układzie kartezjańskim $Oxyz$. Niech $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ i $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$.

Definicja 3.13. *Sumą wektorów* $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy wektor

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\}.$$

Iloczynem wektora $\vec{a}$ *przez liczbę* $\lambda\in\mathbb{R}$ nazywamy wektor

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}.$$

Definicja 3.14. *Wektorem przeciwnym do* $\vec{a}$ nazywamy wektor

$$-\vec{a}=\{-a_x,\ -a_y,\ -a_z\}.$$

Twierdzenie 3.1. Dodawanie wektorów oraz mnożenie przez liczbę ma następujące własności:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\,,$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\,,$$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\,,$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}\,,$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\{a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z\}.$$

Przykład 3.2. Obliczyć współrzędne wektora $4\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, jeżeli

$$\vec{a}=\{1,\ -2,\ 2\},\quad \vec{b}=\{0,\ 3,\ -4\},\quad \vec{c}=\{-1,\ -2,\ 0\}.$$

Rozwiązanie.

$$4\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=4\{1,\ -2,\ 2\}-3\{0,\ 3,\ -4\}+\{-1,\ -2,\ 0\}=$$
$$=\{4,\ -8,\ 8\}-\{0,\ 9,\ -12\}+\{-1,\ -2,\ 0\}=\{3,\ -19,\ 20\}.$$

Definicja 3.15. *Kombinacją liniową wektorów* $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ ...,\ \vec{a}_n$ nazywamy wektor

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3+...+\lambda_n\vec{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i\,,$$

gdzie $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Twierdzenie 3.2. Każdy wektor $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wersorów układu $Oxyz$, tzn.

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\,. \qquad (5)$$

Definicja 3.16. W*ektory* $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\vec{a}_3,...,\vec{a}_n$ nazywamy *liniowo niezależnymi,* jeżeli ich kombinacja liniowa jest równa wektorowi zerowemu, tzn.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i=\vec{0}\,,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=...=\lambda_n=0$. W przeciwnym przypadku wektory $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ ...,\ \vec{a}_n$ nazywamy *liniowo zależnymi.*

Przykład 3.3. Zbadać liniową zależność podanych wektorów:

a) $\vec{a}_1=\{1,\ 1,\ 1\},\quad \vec{a}_2=\{-3,\ 5,\ 3\},\quad \vec{a}_3=\{-5,\ 1,\ 4\};$

b) $\vec{a}=\{1,\ 2,\ 3\},\quad \vec{b}=\{-1,\ 2,\ 1\},\quad \vec{c}=\{2,\ 4,\ 6\}.$

Rozwiązanie. Rozważmy równość

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\,\vec{a}_3=\lambda_1\{1,\ 1,\ 1\}+\lambda_2\{-3,\ 5,\ 3\}+\lambda_3\{-5,\ 1,\ 4\}=\vec{0}.$$

Przyrównując odpowiednie współrzędne wektorów po obu stronach otrzymamy układ równań liniowych

$$\begin{cases}\lambda_1-3\lambda_2-5\lambda_3=0,\\ \lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3=0.\end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy tego układu:

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & -5\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=36.$$

Stąd wynika, że powyższy układ jest układem Cramera. Wobec czego ma dokładnie jedno rozwiązanie. Ponadto, ponieważ ten układ jest jednorodny, więc istnieje tylko rozwiązanie zerowe:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

Zatem zgodnie z definicją podane wektory $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ są liniowo niezależne.

Podobnie jak wyżej dla wektorów $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ rozważmy równość

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\,\vec{c}=\lambda_1\{1,\ 2,\ 3\}+\lambda_2\{-1,\ 2,\ 1\}+\lambda_3\{2,\ 4,\ 6\}=\vec{0}.$$

Otrzymamy wówczas układ równań

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0,\\ 2\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3=0,\\ 3\lambda_1+\lambda_2+6\lambda_3=0.\end{cases}$$

Obliczając wyznacznik macierzy tego układu mamy

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 6\end{vmatrix}=0.$$

Zatem z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że układ ten ma nieskończenie wielu rozwiązań względem niewiadomych $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. A więc liniowa kombinacja wektorów $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ jest równa wektorowi zerowemu nie tylko dla zerowych współczynników $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. To oznacza, że wektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ są liniowo zależne.

Definicja 3.17. Dwa liniowo zależne wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy *wektorami kolinearnymi.*

Z definicji wynika, że dla kolinearnych wektorów zachodzi równość

$$\vec{a}=\lambda\vec{b},\qquad \lambda\neq 0.$$

Stąd dwa wektory kolinearne i niezerowe nazywamy również *wektorami równoległymi*.

Definicja 3.18. Trzy liniowo zależne wektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ nazywamy *wektorami komplanarnymi.*

Twierdzenie 3.3. Wektory $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$ i $\vec{c}=\{c_x,\ c_y,\ c_z\}$ są komplanarne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Przykład 3.4. Wektory $\vec{a}=\{1,\ 2,\ 1\}$, $\vec{b}=\{2,\ 1,\ -1\}$, $\vec{c}=\{1,\ -1,\ -2\}$ są komplanarne, ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

3.2. Iloczyn skalarny wektorów

Definicja 3.19. *Iloczynem skalarnym* dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy liczbę, która jest równa iloczynowi długości tych wektorów i kosinusa kąta między nimi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{7}$$

Bezpośrednio z definicji wynika, że

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b |\vec{b}| = |\vec{a}| b_a, \tag{8}$$

gdzie liczba a_b jest współrzędną wektora $\vec{a}_b$, tzn. rzutu wektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$, i podobnie b_a.

Twierdzenie 3.4. Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są prostopadłe, tzn. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Prostopadłość wektorów oznaczamy przez $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Uwaga. Wektor zerowy $\vec{0} = \{0, 0, 0\}$ jest prostopadły do każdego wektora, bowiem ma dowolny kierunek.

Twierdzenie 3.5. Niech $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ będą dowolnymi wektorami. Iloczyn skalarny ma następujące własności:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Twierdzenie 3.6. W prostokątnym układzie kartezjańskim $Oxyz$ iloczyn skalarny wektorów $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ i $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ wyraża się wzorem

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{9}$$

Stąd

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Dla wersorów układu $Oxyz$ (4) zachodzą równości

$$\begin{aligned} &\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \qquad &&\vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \qquad &&\vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \\ &\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, &&\vec{j} \cdot \vec{j} = 1, &&\vec{k} \cdot \vec{j} = 0, \\ &\vec{i} \cdot \vec{k} = 0, &&\vec{j} \cdot \vec{k} = 0, &&\vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \end{aligned}$$

Przykład 3.5. Obliczyć $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c}^{\,2}$, gdy

$$\vec{a} = \{2, -3, 1\}, \quad \vec{b} = \{3, 4, 1\}, \quad \vec{c} = \{1, -1, -2\}.$$

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (9) mamy

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3+(-3)\cdot 4+1\cdot 1=-5$$

oraz

$$\vec{c}^{\,2}=1^2+(-1)^2+(-2)^2=6.$$

Zatem

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}^{\,2}=-5+6=1.$$

Przykład 3.6. Znaleźć kąt między wektorami $\vec{a}=\{1,\ 1,\ 0\}$ i $\vec{b}=\{1,\ 0,\ -1\}$.

Rozwiązanie. Ze wzoru (7) mamy

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Obliczamy iloczyn skalarny oraz długość wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\qquad |\vec{a}|=\sqrt{2},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{2}.$$

Zatem

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

a więc

$$\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}.$$

Przykład 3.7. Znaleźć wektor $\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}$ wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów $\vec{b}=\{2,\ 3,\ -1\}$ i $\vec{c}=\{1,\ -2,\ 3\}$, oraz spełnia warunek

$$\vec{a}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6.$$

Rozwiązanie. Z warunku prostopadłości wektorów mamy

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Stąd

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x+3y-z=0.$$

Podobnie z warunku $\vec{a}\perp\vec{c}$ otrzymamy

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=x-2y+3z=0.$$

Ponieważ

$$\vec{a}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=2x-y+z,$$

więc mamy równanie

$$2x-y+z=-6.$$

Wtedy układ równań

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\\ \vec{a}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6\end{cases}$$

jest równoważny układowi

$$\begin{cases}2x+3y-z=0,\\ x-2y+3z=0,\\ 2x-y+z=-6.\end{cases}$$

Obliczając wyznacznik macierzy tego układu otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14.$$

To oznacza, że ten układ jest układem Cramera, a więc stosując wzory Cramera otrzymamy

$$x = \frac{D_1}{|A|} = \frac{-42}{14} = -3, \quad y = \frac{D_2}{|A|} = \frac{42}{14} = 3, \quad z = \frac{D_2}{|A|} = \frac{42}{14} = 3.$$

Zatem ostatecznie

$$\vec{a} = \{-3,\ 3,\ 3\}.$$

Przykład 3.8. Znaleźć wektory $\vec{a}_b$ i $\vec{b}_a$, gdy $\vec{a} = \{2,\ 1,\ -3\}$, $\vec{b} = \{4,\ 1,\ 5\}$.

Rozwiązanie. Ponieważ wektor $\vec{a}_b$ (rzut wektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$) jest wektorem równoległym do wektora $\vec{b}$, więc możemy zapisać

$$\vec{a}_b = a_b \hat{\vec{b}}, \tag{10}$$

gdzie a_b jest współrzędną wektora $\vec{a}_b$ zaś $\hat{\vec{b}}$ jest wersorem wektora $\vec{b}$. Zatem

$$\hat{\vec{b}} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Ze wzoru (8) mamy

$$a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Stąd, podstawiając do wzoru (10) otrzymamy

$$\vec{a}_b = a_b \hat{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$

Obliczamy iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz długość $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 = -6, \qquad |\vec{b}|^2 = 16 + 1 + 25 = 42.$$

Podstawiając do powyższego wzoru ostatecznie otrzymamy

$$\vec{a}_b = \frac{-6}{42} \vec{b} = -\frac{1}{7}\{4,\ 1,\ 5\} = \left\{-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}\right\}.$$

Podobnie dla wektora $\vec{b}_a$ mamy wzór

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}.$$

Ponieważ

$$|\vec{a}|^2 = 4 + 1 + 9 = 14,$$

więc

$$\vec{b}_a = \frac{-6}{14}\{2,\ 1,\ -3\} = \left\{-\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{9}{7}\right\}.$$

Najprostszą interpretacją fizyczną iloczynu skalarnego jest praca. Niech wektor siły ma postać $\vec{F} = \{F_x,\ F_y,\ F_z\}$. Wtedy praca A siły $\vec{F}$ wzdłuż przesunięcia o wektor $\vec{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ wyraża się wzorem

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = F_x a_x + F_y a_y + F_z a_z.$$

Przykład 3.9. Znaleźć pracę siły $\vec{F}=\{1,\ 2,\ 3\}$ wzdłuż skierowanego odcinka o początku w punkcie $A(-1,\ 2,\ 1)$ i o końcu punkcie $B(2,\ -1,\ 3)$.

Rozwiązanie. Skierowany odcinek AB, tzn. wektor $\overrightarrow{AB}$, ma współrzędne

$$\overrightarrow{AB}=\{2+1,\ -1-2,\ 3-1\}=\{3,\ -3,\ 2\}.$$

Zatem praca siły $\vec{F}=\{1,\ 2,\ 3\}$ wzdłuż przesunięcia $\overrightarrow{AB}=\{3,\ -3,\ 2\}$ jest równa

$$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=1\cdot 3+2\cdot(-3)+3\cdot 2=3.$$

3.3. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Przestrzeń z prostokątnym układem kartezjańskim $Oxyz$ jest przestrzenią zorientowaną. Trójka wersorów $(\vec{i},\ \vec{j},\vec{k})$ układu $Oxyz$ określa orientację tego układu. Zaznaczmy, że trójka wektorów $(\vec{i},\ \vec{j},\vec{k})$ jest prawoskrętną, ponieważ – patrząc z końca wektora $\vec{k}$ – obrót na płaszczyźnie Oxy wektora $\vec{i}$ w kierunku wektora $\vec{j}$ odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Układ taki nazywamy *układem prawoskrętnym*. W dalszym ciągu rozważamy tylko układy prawoskrętne.

Definicja 3.20. Mówimy, że trójka niekomplanarnych wektorów $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ jest *zgodnie skrętna* z układem $Oxyz$, jeżeli ta trójka ma jednakową orientację z trójką wektorów $(\vec{i},\ \vec{j},\vec{k})$.

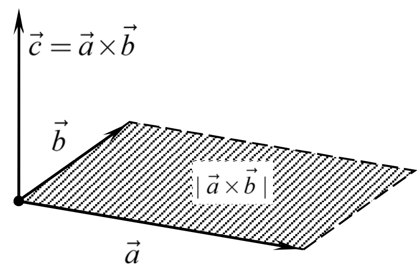
Bezpośrednio z definicji wynika, że przestawienie dwóch wektorów w trójce $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ zmienia jej orientację. Więc, jeżeli trójka wektorów $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ jest prawoskrętna (zgodnie skrętną z układem $Oxyz$), to trójka $(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c})$ jest *lewoskrętna.*

Definicja 3.21. *Iloczynem wektorowym* pary niekolinearnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy wektor $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, który spełnia następujące warunki:

1) długość wektora $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ jest równa $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$;
2) wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tzn. $\vec{c}\perp\vec{a}$ i $\vec{c}\perp\vec{b}$;
3) trójka wektorów $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ jest zgodnie skrętną z układem $Oxyz$.

W przypadku, gdy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są kolinearne, to $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Z definicji wynika, że długość wektora $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 3.4).



Rys. 3.4. Ilustracja geometryczna iloczynu wektorowego

Twierdzenie 3.7. Niech $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni. Iloczyn wektorowy ma następujące własności:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}\,,$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\,,$$

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}), \quad \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|\,,$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\,\|\,\vec{b}\,.$$

Zaznaczmy, że zapis $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$ oznacza równoległość wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Korzystając z definicji łatwo udowodnić, że dla wersorów układu $Oxyz$ zachodzą równości:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}, & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, \\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}. \end{array}$$

Przykład 3.10. Obliczyć iloczyn wektorowy wektorów

$$\vec{a} = 3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}, \qquad \vec{b}=\vec{i}-4\vec{k}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z własności iloczynu wektorowego oraz z powyższych równości mamy

$$\begin{aligned} &\vec{a}\times\vec{b} = (3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\times(\vec{i}-4\vec{k}) = \\ &= 3(\vec{i}\times\vec{i}) - 12(\vec{i}\times\vec{k}) - (\vec{j}\times\vec{i}) + 4(\vec{j}\times\vec{k}) + 2(\vec{k}\times\vec{i}) - 8(\vec{k}\times\vec{k}) = \\ &= 3\vec{0} + 12\vec{j} + \vec{k} + 4\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{0} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 3.8. W kartezjańskim układzie prostokątnym $Oxyz$ iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ i $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$ wyraża się wzorem

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Korzystając z definicji wyznacznika (twierdzenie Laplace'a) wzór (11) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Przykład 3.11. Obliczyć iloczyn wektorowy wektorów

$$\vec{a} = \{1,\ -3,\ 1\}, \quad \vec{b} = \{2,\ -4,\ 2\}.$$

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (12) mamy

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{k}.$$

Zatem $\vec{a}\times\vec{b} = \{-2,\ 0,\ 2\}$.

Przykład 3.12. Obliczyć

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}),$$

jeżeli $\vec{a}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\vec{b}=\{3,\ 0,\ 2\}$, $\vec{c}=\{1,\ 1,\ -1\}$.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (12) obliczamy najpierw iloczyny wektorowe

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k},$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}.$$

Iloczyn skalarny powyższych wektorów obliczamy ze wzoru (9):

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(4\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k})\cdot(-2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k})=-8+25-18=-1.$$

Przykład 3.13. Dane są wektory $\vec{b}=\{1,\ -2,\ 1\}$ i $\vec{c}=\{5,\ 0,\ 1\}$. Znaleźć wektor $\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}$ wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów $\vec{b}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$, oraz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{c}$ jest równy 10.

Rozwiązanie. Z warunku prostopadłości wektorów mamy

$$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{b}\cdot\vec{a}=0,$$

$$\vec{a}\perp(\vec{b}\times\vec{c})\ \Leftrightarrow\ (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=0.$$

Zatem współrzędne wektora $\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}$ wyznaczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}\vec{b}\cdot\vec{a}=0,\\ \vec{c}\cdot\vec{a}=10,\\ (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=0.\end{cases}$$

Pierwsze równanie układu jest równoważne równaniu

$$x-2y+z=0.$$

Podobnie rozpisując drugie równanie otrzymamy

$$5x+z=10.$$

Obliczmy iloczyn wektorowy $\vec{b}\times\vec{c}$:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}+4\vec{j}+10\vec{k}.$$

Zatem

$$(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=-2x+4y+10z.$$

Więc powyższy układ równań jest równoważny układowi

$$\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 5x+z=10,\\ -2x+4y+10z=0.\end{cases}$$

Obliczając wyznacznik macierzy tego układu mamy

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 5 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 10\end{vmatrix}=120.$$

Zatem ten układ jest układem Cramera. Więc stosując wzory Cramera otrzymamy

$$x=\frac{D_1}{|A|}=\frac{240}{120}=2,\quad y=\frac{D_2}{|A|}=\frac{120}{120}=1,\quad z=\frac{D_2}{|A|}=\frac{0}{120}=0.$$

Ostatecznie szukany wektor ma postać

$$\vec{a}=\{2,\ 1,\ 0\}.$$

Przykład 3.14. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1,\ -1,\ 0)$, $B(2,\ 0,\ 1)$ i $C(3,\ 1,\ 1)$.

Rozwiązanie. Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że długość wektora $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego na tych wektorach. Zatem pole trójkąta $\triangle ABC$ obliczamy ze wzoru

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{2-1,\ 0+1,\ 1-0\}=\{1,\ 1,\ 1\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{3-1,\ 1+1,\ 1-0\}=\{2,\ 2,\ 1\}.$$

Zatem

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+\vec{j}.$$

Stąd

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Więc

$$S_\triangle=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Przykład 3.15. Znaleźć wektor $\vec{n}$ prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez trzy dane punkty $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$ i $C(3, 2, 1)$.

Rozwiązanie. Z definicji iloczynu wektorowego dwóch niekolinearnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wynika, że wektor $\vec{a}\times\vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zatem szukany wektor $\vec{n}$ jest prostopadły do wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, a więc możemy ten wektor znaleźć ze wzoru

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}.$$

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{4-1,\ 5-2,\ 6-3\}=\{3,\ 3,\ 3\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{3-1,\ 2-2,\ 1-3\}=\{2,\ 0,\ -2\}.$$

Wtedy

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=-6\vec{i}+12\vec{j}-6\vec{k}.$$

Zatem

$$\vec{n}=\{-6,\ 12,\ -6\}.$$

Zaznaczmy, że każdy wektor kolinearny z wyznaczonym wektorem $\vec{n}$ będzie również prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez trzy dane punkty. To oznacza, że ogólna postać wektora prostopadłego do określonej płaszczyzny jest następująca:

$$\vec{n}=\lambda\{-6,\ 12,\ -6\}=\{-6\lambda,\ 12\lambda,\ -6\lambda\},$$

gdzie $\lambda\neq 0$ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Jednym z wielu przykładów zastosowań iloczynu wektorowego w fizyce jest siła elektromagnetyczna. Oznaczmy przez $\vec{F}$ wektor siły elektromagnetycznej. Niech $\vec{J}$ będzie wektorem prądu elektrycznego oraz $\vec{B}$ – wektorem indukcji magnetycznej. Wtedy siła elektromagnetyczna wyraża się wzorem

$$\vec{F}=l(\vec{J}\times\vec{B}),$$

gdzie l jest długością przewodnika prostoliniowego.

3.4. Iloczyn mieszany trzech wektorów

Definicja 3.22. *Iloczynem mieszanym* trójki wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (oznaczamy przez $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$), nazywamy liczbę

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Twierdzenie 3.9. Niech $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni. Wtedy

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = -(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}),$$

$$(\lambda\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}), \quad \lambda\in\mathbb{R},$$

$$|(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})| \le |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|.$$

Twierdzenie 3.10. W prostokątnym układzie kartezjańskim $Oxyz$ iloczyn mieszany wektorów $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$ i $\vec{c}=\{c_x,\ c_y,\ c_z\}$ wyraża się wzorem

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Przykład 3.16. Obliczyć iloczyn mieszany wersorów układu $Oxyz$.

Rozwiązanie. Wersory układu $Oxyz$ to są wektory

$$\vec{i}=\{1,\ 0,\ 0\}, \quad \vec{j}=\{0,\ 1,\ 0\}, \quad \vec{k}=\{0,\ 0,\ 1\}.$$

Zatem ze wzoru (13) mamy

$$(\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Twierdzenie 3.11. Wektory $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$ i $\vec{c}=\{c_x,\ c_y,\ c_z\}$ są komplanarne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = 0.$$

Ze wzoru (13) bezpośrednio wynika, że warunek komplanarności wektorów jest równoważny równości

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Przykład 3.17. Wektory $\vec{a}=\{2,\ 3,\ -1\}$, $\vec{b}=\{1,\ -1,\ 3\}$ i $\vec{c}=\{1,\ 9,\ -11\}$ są komplanarne, ponieważ

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22-9+9-1-54+33 = 0.$$

Przykład 3.18. Sprawdzić czy punkty $A(-1,\ 2,\ 0)$, $B(2,\ -3,\ 1)$, $C(3,\ 0,\ -2)$ i $D(1,\ 1,\ -1)$ należą do jednej płaszczyzny.

Rozwiązanie. Punkty A, B, C i D należą do jednej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ są współpłaszczyznowe. Z kolei, jeżeli trzy wektory leżą w jednej płaszczyźnie, to te wektory są komplanarne. Należy zatem zbadać iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$. Mamy

$$\overrightarrow{AB} = \{2+1,\ -3-2,\ 1-0\} = \{3,\ -5,\ 1\},$$
$$\overrightarrow{AC} = \{3+1,\ 0-2,\ -2-0\} = \{4,\ -2,\ -2\},$$
$$\overrightarrow{AD} = \{1+1,\ 1-2,\ -1-0\} = \{2,\ -1,\ -1\}.$$

Wtedy

$$(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

To oznacza, że wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ są komplanarne. Zatem punkty A, B, C i D należą do jednej płaszczyzny.

Geometrycznie iloczyn mieszany można zinterpretować w sposób następujący. Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jest równa objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (rys. 3.5), tzn.

$$V = |(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})|.$$

Przykład 3.19. Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$, jeżeli $A(3,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ 4,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 7)$ i $D(3,\ 4,\ -7)$.

Rozwiązanie. Obliczmy najpierw współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$:

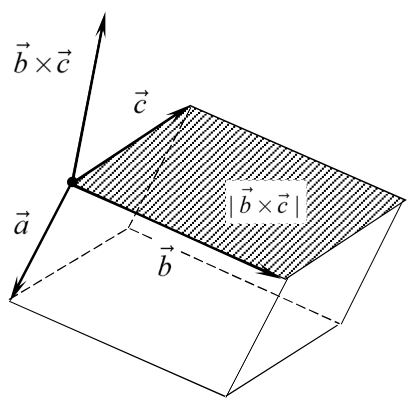
$$\overrightarrow{AB} = \{1-3,\ 4-1,\ 1-1\} = \{-2,\ 3,\ 0\},$$
$$\overrightarrow{AC} = \{1-3,\ 1-1,\ 7-1\} = \{-2,\ 0,\ 6\},$$
$$\overrightarrow{AD} = \{3-3,\ 4-1,\ -7-1\} = \{0,\ 3,\ -8\}.$$

Zatem

$$(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = -12.$$

Stąd objętość V szukanego równoległościanu wyraża się wzorem

$$V = |(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})| = 12.$$



Rys. 3.5. Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego

Przykład 3.20. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A(-1,\ 0,\ 2)$, $B(3,\ 4,\ -1)$, $C(0,\ 2,\ 1)$ i $D(-5,\ -2,\ 6)$.

Rozwiązanie. Objętość szukanego czworościanu wyraża się wzorem

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})\right|.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AB}=\{3+1,\ \ 4-0,\ \ -1-2\}=\{4,\ 4,\ -3\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{0+1,\ \ 2-0,\ \ 1-2\}=\{1,\ 2,\ -1\},$$
$$\overrightarrow{AD}=\{-5+1,\ \ -2-0,\ \ 6-2\}=\{-4,\ -2,\ 4\},$$

więc

$$(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=6.$$

Stąd

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})\right|=\frac{6}{6}=1.$$

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch